Mécanique des fluides
Correction

I - Sonder l'atmosphère

Extrait Centrale-Supélec TSI 2008

1. On étudie la tranche de fluide d'épaisseur dz dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à :

   ▷ la résultante des forces de pression $d\overrightarrow{F_p} = (P(z) - P(z+dz))S\overrightarrow{u_z}$

   ▷ son poids $d\overrightarrow{F_g} = -\rho g S dz \overrightarrow{u_z}$

   Le fluide est au repos, donc on a $d\overrightarrow{F_p} + d\overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{0}$ d'où $(P(z) - P(z+dz))S = \rho g S dz$.
   Au final

   $$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$$

   D'après la relation des gaz parfaits sur la tranche, $Pd\tau = dnRT_0 = \frac{m}{M_{air}}RT_0$. On en déduit que la masse volumique vérifie $\rho = \frac{PM_{air}}{RT_0}$

   En réinjectant dans la relation obtenue précedemment, on a $\frac{dP}{dz} = -\frac{P(z)M_{air}}{RT_0}g$, soit

   $$\boxed{\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0} \qquad \text{avec } H = \frac{RT_0}{M_{air}g}$$

2. On résout cette équation différentielle et on obtient $\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}}$

3. On sait que $H \simeq 8$ km. En supposant que l'atmosphère s'arrête quand ,$P < P_0/100$, elle a donc une épaisseur de l'ordre de $5H = 40$ km.
   En traçant la tangente à l'origine sur la figure 3, elle coupe l'abscisse en $z = H = 9$ km. On retrouve donc bien le même ordre de grandeur pour H.

4. Dans la stratosphère la température est une fonction croissante de la hauteur alors que dans la troposphère c'est une fonction décroissante de la température.

5. Dans la troposphère on a une variation de température d'environ 100°C, donc on ne peut pas la considérer comme isotherme. Cependant, d'après la courbe de la figure 3, le modèle de gradient de température ne donne pas un gros écart de pression avec celui isotherme.

6. Sur la figure 2, l'évolution de la température en fonction de l'altitude semble affine, ce qui est cohérent avec ce choix de profil. Graphiquement on obtient $T_0 = 26$°C et $a = 6.10^{-3}$ K/m.

7. En reprenant la loi des gaz parfaits, on obtient : $\rho = \frac{PM_{air}}{RT(z)} = \frac{PM_{air}}{R(T_0 - az)}$
   En réinjectant dans la relation de la statique des fluides, on a $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_{air}g}{R(T_0 - az)}P$.

Par séparation des variables, $\dfrac{dP}{P}\dfrac{M_{air}g}{R}\dfrac{dz}{T_0 - az}$

Intégrons entre $z = 0$ et z' :

$$\ln\left(\frac{P(z')}{P_0}\right) = \frac{M_{air}g}{aR}\ln\left(\frac{T_0 - az'}{T_0}\right) = \ln\left(\left(\frac{T_0 - az'}{T_0}\right)^{\frac{M_{air}g}{aR}}\right)$$

D'où

$$\boxed{P(z) = P_0(1 - bz)^{\alpha} \qquad \text{avec } \alpha = \frac{M_{air}g}{aR} \text{ et } b = \frac{a}{T_0}}$$

8. Pour $bz \ll 1$, un développement limité au premier ordre donne

$$P(z) = P_0(1 - \alpha bz) = P_0\left(1 - \frac{M_{air}g}{RT_0}z\right)$$

Dans le cas de l'atmosphère isotherme, un développement limité au premier ordre donne également

$$P(z) = P_0\left(1 - \frac{z}{H}\right) = P_0\left(1 - \frac{M_{air}g}{RT_0}z\right)$$

On retrouve bien le même résultat.

9. En faisant l'AN sur les expressions de T_0 et a, on obtient $a = 6.10^{-3}$ K/m et $T_0 = 300$ K, ce qui est satisfaisant.

10. Dans le modèle avec gradient, $H' = \dfrac{1}{b}$ est une distance caractéristique. $H' = 50$ km, on retrouve bien le même ordre de grandeur.

11. Le champ g à l'altitude z vérifie $g(z) = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{(R_T + z)^2}$

On a donc $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_T}{(R_T + z)^2}}{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}} = 1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{z}{R_T}\right)^2}$

Comme $z \ll R_T$, on peut effectuer un développement limité :

$\dfrac{\Delta g}{g} = 1 - \left(1 - 2\dfrac{z}{R_T}\right) = 2\dfrac{z}{R_T} = 0,006$

On peut donc négliger la variation de g avec l'altitude sur 20 km.

12. La masse m_{gaz} de gaz contenue dans l'enveloppe au décollage vérifie $\boxed{m_{gaz} = nM_{He} = \dfrac{P_0V}{RT_0}M_{He}}$.

AN : $m_{gaz} = 18$ kg

13. On fait le bilan des forces :

- ▷ poids : $(m + m_{gaz})\overrightarrow{g}$
- ▷ poussée d'Archimède : $-\rho_{air}V\overrightarrow{g}$ avec $\rho_{air} = \dfrac{P_0M_{air}}{RT_0}$.

Le ballon décolle si la norme de la poussée d'Archimède est plus grande que celle du poids, ie $m < \dfrac{P_0V}{RT_0}(M_{air} - M_{He})$

AN : $m < 110$ kg.

14. Au cours de l'ascension la pression de l'air diminue, comme elle est égale à celle de l'hélium dans le ballon, et que le volume du ballon reste constant, de l'hélium sort du ballon et la masse d'hélium dans le ballon diminue. La poussée d'Archimède qui est proportionnelle à la pression P est de plus en plus faible.

15. Le plafond est atteint quand la norme de la poussée d'Archimède est égale à celle du poids : $P(z_{eq}) = \dfrac{RT_0}{V(M_{air} - M_{He})} m$.
En réinjectant $P(z)$ avec l'expression obtenue pour l'atmopshère isotherme, on a

$$\boxed{z_{eq} = H \ln\left(\frac{P_0 V(M_{air} - M_{He})}{mRT_0}\right)}$$

AN : $z_{eq} = 20$ km.

16. Le volume du ballon augmente au cours de l'ascension puisque la pression extérieure diminue avec l'altitude, donc l'épaisseur de l'enveloppe diminue jusqu'à éclatement.

17. σ s'exprime en N/m ou $kg.s^{-2}$.
Au moment du décollage, on a $\sigma = \dfrac{r_{ini}}{4}(P_{int} - P_0)$.
Or, au moment du décollage, $P_{int} = \dfrac{RT_0 m_{He}}{V M_{He}} = \dfrac{RT_0 m_{He}}{4/3\pi r_{ini}^3 M_{He}}$.
On en déduit que

$$\boxed{\sigma = \frac{r_{ini}}{4}\left(\frac{3RT_0 m_{He}}{4\pi r_{ini}^3 M_{He}} - P_0\right)}$$

18. A l'altitude maximale atteinte par le ballon, $P(z_{max}) = P_{int}(z_{max}) - \dfrac{4\sigma}{r_{fin}}$.
On en conclut

$$\boxed{z_{max} = -H \ln\left(\frac{1}{P_0}\left(\frac{3RT_0 m_{He}}{4\pi r_{ini}^3 M_{He}} - \frac{4\sigma}{r_{fin}}\right)\right)}$$

On retrouve, à 10 % près, le même ordre de grandeur de l'altitude maximale.

II - Quelques aspects relatifs au système vasculaire

A - Modélisation du coeur

19. On a $\boxed{D = \dfrac{\text{volume pulsation}}{\text{durée pulsation}} \simeq 88\,\text{mL/s}}$ avec la durée d'une pulsation égale à $\dfrac{1}{70}$ min soit $\dfrac{6}{7}$ s.

On obtient alors : $\boxed{v_s = \dfrac{D}{S} \simeq 29\,\text{cm/s}}$

B - Ecoulement sanguin

20. Un écoulement dans une conduite cylindrique est laminaire si $\text{Re} < 2.10^3$.

21. On a $\boxed{\boldsymbol{F_v} = \eta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} 2\pi\, r\, L\, \boldsymbol{u_x}}$

22. $\boxed{\boldsymbol{F_{p,amont}} = P_1\,\pi\,r^2\,\boldsymbol{u_x} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F_{p,aval}} = -P_2\,\pi\,r^2\,\boldsymbol{u_x}}$

23. On applique le principe fondamental de la dynamique au système précisé dans l'énoncé. L'accélération globale du système est nulle.

On a alors : $\sum \boldsymbol{F_{ext}} = \boldsymbol{F_v} + \boldsymbol{F_p} = \boldsymbol{0}$ puis, en projection selon $\boldsymbol{u_x}$, on obtient bien $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{P_1 - P_2}{2\eta\,L}\,r}$

On intègre l'expression précédente : $v(r) = -\dfrac{P_1 - P_2}{4\eta\,L}\,r^2 + A$

et on utilise la condition aux limites $v(r = R) = 0$ donc $\boxed{\boldsymbol{v} = \dfrac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta\,L}\,\boldsymbol{u_x}}$

24. On calcule le débit volumique :

$$D_v = \iint_{section} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{section} \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta\,L}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \boxed{\frac{\pi R^4}{8\eta\,L}(P_1 - P_2) = D_v}$$

La vitesse moyenne, également appelée vitesse débitante, est alors :

$$\boxed{v_m = \frac{D_v}{\pi R^2} = \frac{(P_1 - P_2)\,R^2}{8\eta\,L}}$$

25. Il faut calculer $\mathrm{Re} = \dfrac{2R\,v_m\,\rho_s}{\eta}$

On calcule d'abord $v_m = 0{,}78$ mm/s puis on trouve $\mathrm{Re} = 2{,}1.10^{-3}$ donc l'écoulement est bien **laminaire**.

Remarque : l'énoncé parle de "perte de charge" pour la perte de pression $P_1 - P_2$ alors que, souvent, la charge est homogène à une longueur. Si la charge est définie comme une pression, la perte de charge serait d'ailleurs plutôt une perte de pression totale.

26. On va utiliser le fait que l'écoulement est homogène et incompressible. Ainsi, le débit volumique se conserve et se "répartit" dans l'ensemble des capillaires en parallèle.

On a alors $D = N.D_{v,cap} = N.\pi R^2\,v_{cap}$ d'où $\boxed{N = \dfrac{D}{\pi\,R^2\,v_{cap}} \simeq 10^9}$

Partie III - Oscillateur hydraulique

27. Dans un écoulement parfait, stationnaire et incompressible, sur une ligne de champ et en absence de parties mobiles, on a

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = cste$$

28. L'eau va monter dans le siphon, a priori à la même hauteur que dans le réservoir.
Ayant $S_r \gg S_t$, on peut négliger la quantité d'eau qui est dans le siphon devant la quantité d'eau qui est dans le réservoir.

29. Lors de cette première étape, on a simplement le réservoir qui se remplit via un écoulement à débit constant.
Entre l'instant t et l'instant $t+dt$, on a ajouté un volume $D_e dt$. Le volume supplémentaire peut également s'écrire $(z(t/dt) - z(t))S_r$.
On a donc $D_e dt = \dfrac{dz}{dt} dt S_r$, d'où

$$\frac{dz}{dt} = \frac{D_e}{S_r}$$

On intègre facilement et $z(t) = \dfrac{D_e}{S_r} t + z_B$.

30. On résout $z(t_1) = z_C$: $\dfrac{D_e}{S_r} t_1 + z_B = z_C$, d'où

$$t_1 = \frac{S_r}{D_e}(z_C - z_B)$$

31. Au moment où on atteint z_C, le siphon s'amorce (d'après l'énoncé) et le fluide dans le siphon est en écoulement pour vider le réservoir.

32. Ayant $S_r \gg S_t$, par conservation du débit volumique (l'écoulement étant stationnaire et incompressible), on a $v_D \gg v_A$.
Par ailleurs, appliquons la relation de Bernoulli à la ligne de champ reliant A et D :

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz(t) = \frac{P_D}{\rho} + \frac{1}{2}v_D^2 + gz_D$$

On a $P_A = P_D = P_{atm}$ et $v_A \ll v_D$, donc au final $v_D = \sqrt{2g(z(t) - z_D)} = \sqrt{2gz}$

33. Par définition, $D_t = S_t v_D = S_T\sqrt{2gz}$

34. Effectuons un bilan de volume : la variation de volume du fluide dans l'oscillateur est $(D_e - D_t)dt$ puisqu'on ajoute du fluide à un débit D_e et on vide à un débit D_t.
Par ailleurs, la variation de volume peut s'écrire comme $\dfrac{dz}{dt}S_r dt$
On a alors $D_e - D_t = \dfrac{dz}{dt}S_r = D_e - \sqrt{2gz}S_t$, d'où

$$\frac{dz}{dt} + \frac{S_t}{S_r}\sqrt{2gz} = \frac{D_e}{S_r}$$

35. On a $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{D_e - S_t\sqrt{2gz}}{S_r}$. Pour que le réservoir se vide effectivement, il faut $\dfrac{dz}{dt} < 0$ tout au long de la vidange.
En particulier au début de la vidange il faut $D_e < S_t\sqrt{2gz_C}$ et à la fin $D_e < S_t\sqrt{2gz_B}$.
Ayant $z_C > z_B$, il suffit d'avoir $D_e < S_t\sqrt{2gz_B}$.
Si D_e est choisi proche de $S_t\sqrt{2gz_B}$, la phase de remplissage sera la plus rapide autorisée pour permettre une vidange mais la phase de vidange sera plus lente. Si au contraire on prend $D_e \ll S_t\sqrt{2gz_B}$, la phase de remplissage sera lente et la vidange plus rapide.

36. La vidange s'arrête si pour une hauteur z_0, on a $D_e - S_t\sqrt{2gz_0} < 0$ ie $z_0 = \dfrac{D_e^2}{2gS_t^2}$.
En effet, à ce moment, le débit de remplissage est égal au débit de vidange : le niveau ne bouge plus.

37. Si D_e est négligeable devant D_t, on a $\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{S_t}{S_r}\sqrt{2gz} = 0$.
On procède par séparation des variables : $\dfrac{dz}{\sqrt{z}} = -\dfrac{S_t}{S_r}\sqrt{2g}dt$.
On intègre entre l'instant t_1 et un instant t de la vidange :

$$\int_{z_C}^{z} \frac{dz'}{\sqrt{z'}} = -\frac{S_t}{S_r}\sqrt{2g}\int_{t_1}^{t} dt'$$

d'où

$$z(t) = \left(\sqrt{z_C} - \frac{S_t}{S_r}\sqrt{\frac{2}{g}}(t - t_1)\right)^2$$

On résout $z(t_2') = z_B$ et on obtient $t_2 = t_2' - t_1$ d'où

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{S_r}{S_t}(\sqrt{z_C} - \sqrt{z_B})$$

38. $T = t_1 + t_2 = \dfrac{S_r}{D_e}(z_C - z_B) + \sqrt{\dfrac{2}{g}}\dfrac{S_r}{S_t}(\sqrt{z_C} - \sqrt{z_B})$